Doctorado en Economía, y
Maestría en T. y P. Económica Avanzada
FACES, UCV

Prof. Angel García Banchs
contact@angelgarciabanchs.com

Microeconomía I

Clase/Semana 5



Decisiones bajo condiciones de riesgo

¿Qué es el riesgo y qué es la incertidumbre?

¿Cuál es el supuesto (condición matemática) que nos permite hablar de riesgo en lugar de incertidumbre?

¿Cuál es la diferencia fundamental?, y

¿Cuál es su implicación para la ciencia económica y, en particular, para la teoría neoclásica, la contratación de mercancías para entrega a futuro, los seguros, etc.?

Decisiones bajo condiciones de riesgo

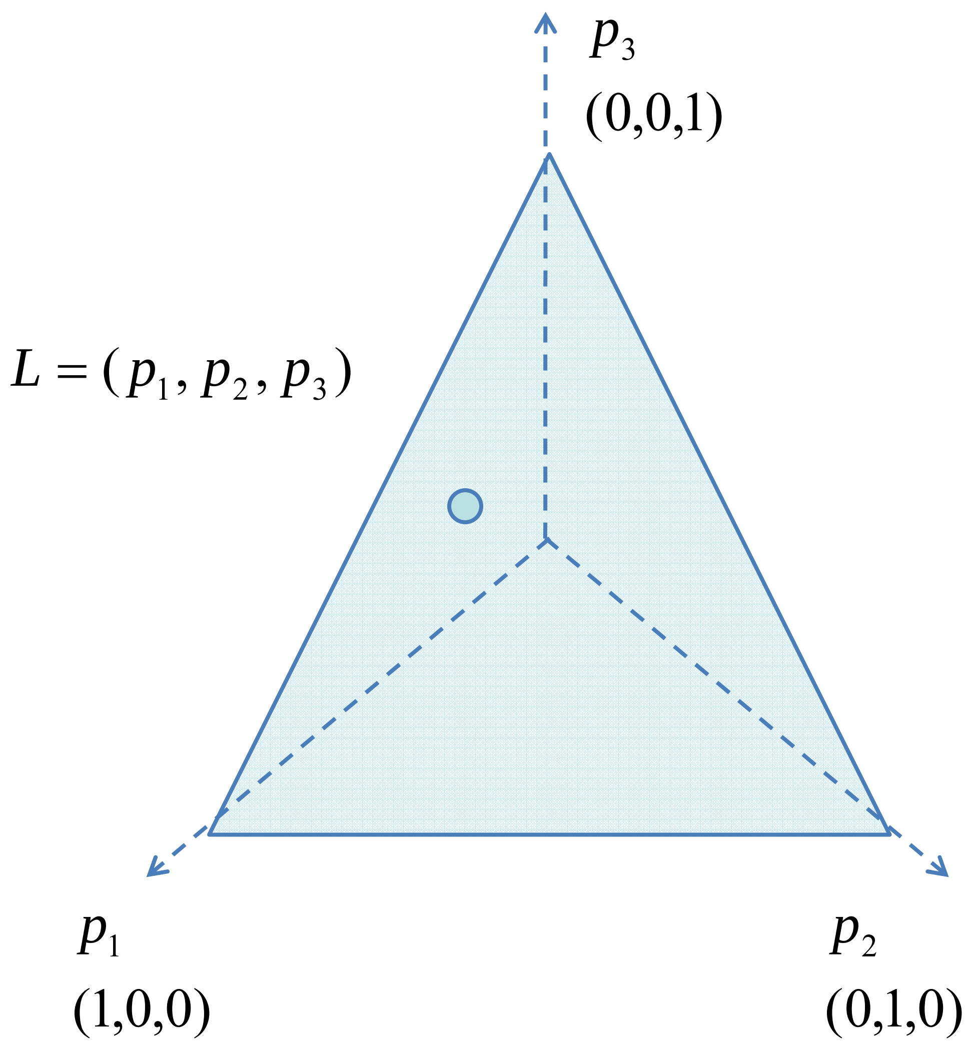
Los individuos pueden tomar decisiones diferentes a las que tomarían bajo condiciones de certidumbre, y tales diferencias se deberían a las preferencias en relación al riesgo

C es el conjunto finito de todos los resultados posibles (consecuencias) o premios que van de $n = 1,..., N$

cada n implica una combinación de bienes y, por tanto, puede o no conducir a niveles de utilidad (satisfacción o beneficio) distintos, a menos que n esté expresado en términos de Bs F

La lotería simple L es una lista $L = (p_1,..., p_N)$ con $p_n \geq 0$ para todo n y $\sum_n p_n = 1$, siendo p_n la probabilidad de que el resultado n ocurra

Decisiones bajo condiciones de riesgo



Decisiones bajo condiciones de riesgo

Loterías compuestas

Dado un número K de loterías simples $L^k = (p_1^k,\dots, p_N^k)$ con $k = 1,\dots,K$ y probabilidades $\alpha^k \geq 0$ con $\sum_k \alpha^k = 1$, una lotería compuesta $(L^k, \alpha^k : k = 1,\dots,K)$ es la alternativa riesgosa que equivale a la lotería simple L^k con probabilidad α^k

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Loterías compuestas

Para cada lotería compuesta $(L^k, \alpha^k : k = 1,\ldots,K)$ existe una lotería simple

$L = (p_1, \ldots, p_N)$, donde $p_n = \alpha^1 p_n^1 + \ldots + \alpha^k p_n^K$

Ejemplo : Considérese un caso con 3 consecuencias $C = (1,2,3)$ y

5 loterías asociadas :

$$L^1 = (p_1^1, p_2^1, p_3^1) = (1,0,0)$$

$$L^2 = (p_1^2, p_2^2, p_3^2) = (1/4, 3/8, 3/8)$$

$$L^3 = (p_1^3, p_2^3, p_3^3) = (3/4, 1/4, 0)$$

$$L^4 = (p_1^4, p_2^4, p_3^4) = (1/2, 1/8, 3/8)$$

$$L^5 = (p_1^5, p_2^5, p_3^5) = (1/2, 1/4, 1/4)$$

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Loterías compuestas

Ahora considérense 2 loterías compuestas. La primera compuesta de L^1 y L^5 con probabilidades respectivas $\alpha^1 = 1/4$ y $\alpha^5 = 3/4$ y la segunda compuesta de L^3 y L^4 con probabilidades respectivas $\alpha^3 = 1/2$ y $\alpha^4 = 1/2$

$$L_C^I = \alpha^1 L^1 + \alpha^5 L^5 = 1/4 \times (1,0,0) + 3/4 \times (1/2, 1/4, 1/4)$$
$$= (1/4, 0, 0) + (3/8, 3/16, 3/16) = (5/8, 3/16, 3/16)$$

y en el caso de la segunda lotería compuesta

$$L_C^{II} = \alpha^3 L^3 + \alpha^4 L^4 = 1/2 \times (3/4, 1/4, 0) + 1/2 \times (1/2, 1/8, 3/8)$$
$$= (3/8, 1/8, 0) + (1/4, 1/16, 3/16) = (5/8, 3/16, 3/16)$$

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Loterías compuestas

En el ejemplo,

$$L_C^I = L_C^{II}$$

(son equivalentes en tanto que asignan las mismas posibilidades)

El punto es que inclusive las loterías compuestas
(o combinaciones lineales) pueden expresarse
en términos de (o, lo que es lo mismo, reducirse a) loterías simples

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Preferencias sobre loterías

Sea **L** el conjunto de las loterías simples a escoger asociadas al conjunto de consecuencias C. Asumiremos que las relaciones de preferencia ($\geq$) sobre las loterías son completas y transitivas, además de :

1. Continuas : Las $\geq$ sobre **L** son continuas si para cualquier $L, L', L'' \in \mathbf{L}$, los siguientes conjuntos son conjuntos cerrados :

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1 - \alpha) L' \geq L''\}$$

$$\{\alpha \in [0,1] : L'' \geq \alpha L + (1 - \alpha) L'\}$$

2. Independientes : Las $\geq$ sobre **L** son independientes si para toda $L, L', L'' \in \mathbf{L}$, y $\alpha \in (0,1)$, se tiene que $L \geq L'$ si sólo si

$$\alpha L + (1 - \alpha) L'' \geq \alpha L' + (1 - \alpha) L''$$

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Contraejemplo: C = (\$1.000, \$10, muerte) con L ≥ L' ≥ L ' '

Experimento 1					
Lotería L		Lotería L'		Lotería L''	
Premio	Chance	Premio	Chance	Premio	Chance
\$1.000	100%	\$1.000	0%	\$1.000	0%
\$10	0%	\$10	0%	\$10	100%
muerte	0%	muerte	100%	muerte	0%

\$1.000		\$0		\$0
\$0	≥	\$0	≥	\$10
\$0		\$0		\$0
\$1.000		muerte		\$10

¿Escogerían L ' ?

Sin embargo, continuidad implica: $\alpha L + (1 - \alpha) L' \geq L''$

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Paradoja de Allais – Maurice Allais – Ejemplo: C = ($2.500, $2.400, 0)

Experimento 1				**Experimento 2**			
Lotería 1A		**Lotería 1B**		**Lotería 2A**		**Lotería 2B**	
Premio	**Chance**	**Premio**	**Chance**	**Premio**	**Chance**	**Premio**	**Chance**
$2.500	33%	$2.500	0%	$2.500	33%	$2.500	0%
$2.400	66%	$2.400	100%	$2.400	0%	$2.400	34%
$0	1%	$0	0%	$0	67%	$0	66%

Valor	$825		$0	$825		$0
Esperado	$1.584	>	$2.400	$0	>	$816
	$0		$0	$0		$0
	$2.409		$2.400	$825		$816

¿Cuál escogerían?

¿Por qué sería inconsistente con la teoría de la utilidad esperada?

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Paradoja de Allais – Maurice Allais – Ejemplo: C = (\$2.500, \$2.400, 0)

Teoría de la utilidad esperada			¿Y, en la práctica?		
Lotería 1A	$\geq$	Lotería 1B	Lotería 1B	$\geq$	Lotería 1A
Lotería 2A	$\geq$	Lotería 2B	Lotería 2A	$\geq$	Lotería 2B

Si en la práctica la mayoría prefiere L1B (+ certeza) a L1A (+ rend.), entonces, para que se cumpla el principio de independencia, la mayoría también debería preferir L2B (+certeza) a L2A (+ rend.). Pero, sucede lo contrario: la mayoría prefiere L2A a L2B

Matemáticamente:

$$100\% \times U(\$2400) \geq 33\% \times U(\$2500) + 66\% \times U(\$2400) + 1\% \times U(\$0)$$

$$34\% \times U(\$2400) \geq 33\% \times U(\$2500)$$

Entonces, aquí no se cumple la independencia

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Teorema (utilidad esperada von Neumann-Morgenstern (v.N-M)):

Supóngase que las relaciones de preferencia ($\geq$) completas y transitivas satisfacen los supuestos de continuidad e independencia. Entonces, es posible una representación utilitaria de las $\geq$ del tipo utilidad esperada; es decir, para cada resultado $n = 1,\dots, N$ existe un escalar $u_n = (u_1,\dots, u_N)$ asociado tal que cada $L = (p_1,\dots, p_N)$ y $L' = (p'_1,\dots, p'_N)$, $L \geq L'$ si sólo si $\sum_n p_n u_n \geq \sum_n p'_n u_n$

$U = (u_n : n = 1,\dots, N)$ representa una relación de preferencia $\geq$ sobre **L**. Entonces, cualquier transformación lineal de U también

$V = (v_n = a u_n + b : n = 1,\dots, N)$

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Teorema (utilidad esperada von Neumann-Morgenstern (v.N-M)):

Entonces $U : \mathbf{L} \to \Re$ tiene una expresión como utilidad esperada si existe una asignación de escalares $u_n = (u_n, \ldots u_N)$ que reflejan la satisfación asociada a cada resultado $n = (1, \ldots, N)$, de forma tal que para cada $L = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbf{L}$ se tenga que :

$$U(L) = p_1 u_1 + p_2 u_2 + \ldots + p_N u_N$$

¿Cuál es el valor de $U(L^n)$, si es la lotería que garantiza que el resultado n se de con certeza $p^n = (0, \ldots, 0, p_n^n, 0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$?

$$U(L^n) = u_n$$

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Aversión al riesgo:

Normalmente, consideraremos resultados monetarios, de forma tal que claramente más es preferido a menos y los problemas de comparar manzanas y peras no están presentes. En este contexto, el escalar (nivel de utilidad o satisfacción) asociado a un resultado depende de una función del dinero o riqueza.

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Aversión al riesgo:

Matemáticamente :

$C = \Re_+$; es decir, el conjunto de selección consiste en distintos niveles de dinero (riqueza)

Considérese un subconjunto finito de $\Re_+$, $\{w_1, \ldots w_N\}$. Sea $L = (p_1, \ldots p_N)$ una lotería sobre ese subconjunto. El teorema de la utilidad esperada aplicado a este contexto implica la existencia de una función de utilidad $U : \Re_+ \rightarrow \Re$, de forma tal que las preferencias individuales sobre loterías como L sobre un un subconjunto finito de $\Re_+$
puede expresarse así :

$$\sum_n p_n u(w_n)$$

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Aversión al riesgo:

Para una lotería simple L, la riqueza esperada se define como :

$Ew = \sum_n p_n w_n$, con $u(Ew) = u(\sum_n p_n w_n)$.

Entonces, el individuo se dice que es :

(i) averso al riesgo en L si $u(Ew) > \sum_n p_n u(w_n)$

(ii) neutral al riesgo en L si $u(Ew) = \sum_n p_n u(w_n)$

(ii) amante del riesgo en L si $u(Ew) < \sum_n p_n u(w_n)$

donde $u(Ew)$ es la utilidad de la riqueza o ingreso esperado

y $\sum_n p_n u(w_n)$ es la utilidad esperada de la riqueza o ingreso

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Aversión al riesgo:

$$\text{Ejemplo}: w^1 = (50,0) \text{ y } L^1 = (1,0) \quad \text{vs} \quad w^2 = (100,0) \text{ y } L^2 = (1/2\,,1/2)$$

$$50 \text{ con certeza} \quad \text{vs} \quad 100 \text{ con probabilidad } 1/2$$

Valor esperado del ingreso o riqueza en ambos casos es igual a 50 lo cual implica que un individuo que fuese neutral al riesgo se sintiría indiferente a la hora de escoger entre L^1 y L^2

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Aversión al riesgo:

es averso al riesgo si está dispuesto a aceptar un monto menor a 50 Bs F (ej : 40 Bs F) con tal de recibirlo con certeza, en vez de jugarse la L^2 al riesgo de perderlo todo

es neutral si es indiferente frente a un pago cierto de 50 Bs F o jugarse la L^2

es amante del riesgo si prefiere jugarse la L^2 a recibir un pago cierto de 50 Bs F, o lo que es lo mismo si sólo está dispuesto a aceptar un monto mayor a 50 Bs F (ej : 60 Bs F) para desistir no jugarse la L^2

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Aversión al riesgo:

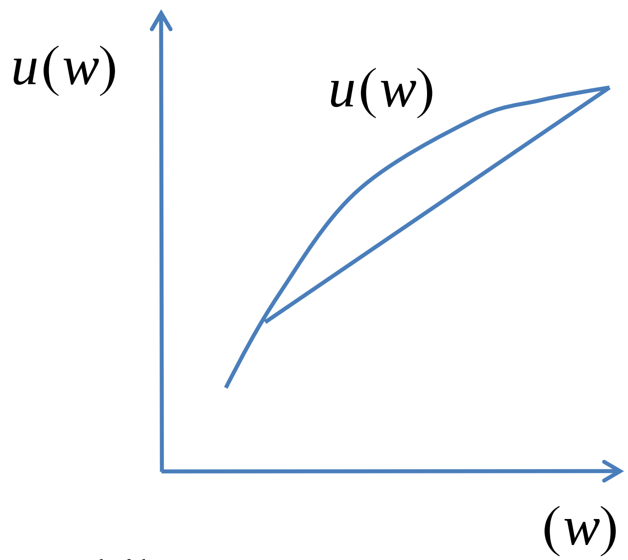
En el ejemplo el valor esperado es 50 Bs F, la cantidad de dinero que el individuo aceptaría para no jugar la apuesta riesgosa L^2 es el equivalente de certidumbre (40 Bs F averso, 60 Bs F amante) y la diferencia entre el valor esperado y el equivalente de certidumbre es la prima de riesgo del averso (50 - 40, averso, o en % (50 - 40)/40 = 25%) o descuento de riesgo del amante del riesgo
(50 - 60, averso, o en % (50 - 60)/60 = -17%)

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Aversión al riesgo:

Matemáticamente, la prima de riesgo es la cantidad de dinero P, tal que :

$$u(Ew-P)=\sum_n p_n u(w_n)$$



$Ew-P=EC$ por tanto,

es el equivalente de certidumbre

$$u(EC)=\sum_n p_n u(w_n)$$

Un individuo que sea averso al riesgo exhibe

una función de utilidad $u(w_n)$

cóncava y, por tanto, está dispuesto

a pagar una prima $P>0$

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Aversión al riesgo:

Para una $u(w)$ que sea doblemente diferenciable de forma continua, en algún $w > 0$, la medida de aversión absoluta $(\mathrm{AAR}(w))$ y relativa $(\mathrm{ARR}(w))$ al riesgo Arrow - Pratt (Kenneth Arrow y John W. Pratt) vienen dadas por :

$$\mathrm{AAR}(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} \quad \text{y} \quad \mathrm{ARR}(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}\, w$$

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Aversión al riesgo:

si $\mathrm{AAR}(w)$ decrece con w, $\frac{d\mathrm{AAR}(w}{dw}$, entonces se afirma que el individuo exhibe una aversión al riesgo absoluta pero decreciente

si $\mathrm{ARR}(w)$ decrece con w, $\frac{d\mathrm{ARR}(w}{dw}$, entonces se afirma que el individuo exhibe una aversión al riesgo relativa pero decreciente

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Aversión al riesgo:

Ejemplos de distintas funciones :

1) $u(w) = -e^{-\alpha w}$ aversión al riesgo absoluta constante (AARC)

2) $u(w) = \log(w)$ aversión al riesgo absoluta decreciente (AARD)

3) $u(w) = w - \alpha w^2$ aversión al riesgo absoluta creciente (AARC)

con $\alpha > 0$

Decisiones bajo condiciones de riesgo

Fin clase de hoy…