Doctorado en Economía, y
Maestría en T. y P. Económica Avanzada
FACES, UCV

Prof. Angel García Banchs
contact@angelgarciabanchs.com

Microeconomía I

Clase/Semana 3

Problema del consumidor

El problema de la maximización de la utilidad sujeto a la restricción presupuestaria tiene como dual (i.e. como equivalente) la minimización del gasto en bolívares fuertes necesario para alcanzar un nivel de utilidad dado:

$$\begin{array}{lcl} \max\limits_{x\geq 0} u(x) & & \min\limits_{x\geq 0} px \\ & \approx & \\ s.a.\ \ px \leq m & & s.a.\ \ v(x) = \bar{u} \end{array}$$

<u>Ejemplo</u>: $u(x) = \mathrm{x}_1^{\alpha 1}\mathrm{x}_2^{\alpha 2}$

$$\begin{array}{lcl} \max\limits_{\{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2\}} \mathrm{x}_1^{\alpha 1}\mathrm{x}_2^{\alpha 2} & & \min\limits_{\{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2\}} \mathrm{p}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{p}_2\mathrm{x}_2 \\ & \approx & \\ s.a.\ \mathrm{p}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{p}_2\mathrm{x}_2 \leq m & & s.a.\ \mathrm{x}_1^{\alpha 1}\mathrm{x}_2^{\alpha 2} = \bar{u} \end{array}$$

¿Por qué lo anterior es posible? ¿Qué permite la dualidad?
¿Qué conduce a que la selección de las *x* sea igual en ambos casos?
Y, ¿cuál es la implicación para la distribución del ingreso y las interacciones sociales?

Problema del consumidor

Resultado:

$$\max_{\{x_1, x_2\}} x_1^{\alpha 1} x_2^{\alpha 2}$$
$$s.a.\ \ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$$

$$\approx$$

$$\min_{\{x_1, x_2\}} p_1 x_1 + p_2 x_2$$
$$s.a.\ \ x_1^{\alpha 1} x_2^{\alpha 2} = \bar{u}$$

$$x_1^*(m, p_1) = \frac{m}{p_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$x_2^*(m, p_2) = \frac{m}{p_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Marshalliana

$$\approx$$

$$x_1^*(u, p_1, p_2) = \left(\frac{\bar{u}}{\left[\dfrac{p_1}{p_2} \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \right]^{\alpha_2}} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

$$x_2^*(u, p_1, p_2) = \frac{p_1}{p_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{\bar{u}}{\left[\dfrac{p_1}{p_2} \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \right]^{\alpha_2}} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

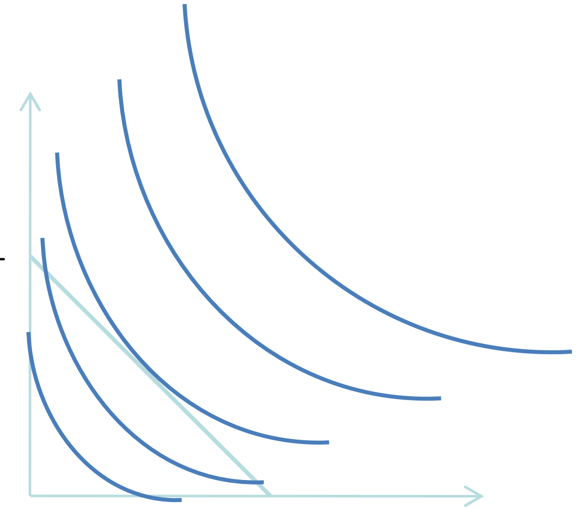
Hicksiana
o compensatoria
¿por qué?

Problema del consumidor

Resultado:

$$\max_{\{x_1, x_2\}} x_1^{\alpha 1} x_2^{\alpha 2}$$

$$s.a.\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \le m$$



$$x_1^*(m, p_1) = \frac{m}{p_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$x_2^*(m, p_2) = \frac{m}{p_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

$$\underbrace{\frac{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_2}}}_{TMS-Sub} = \underbrace{\frac{p_1}{p_2}}_{TES-Obj}$$

$$BM = CM$$

Problema del consumidor

Resultado:

La función de demanda del bien *l* depende únicamente del *l*-avo precio, además de ser homogéneo de grado 0 en *m* y *p,* y lineal en *m*. Por ello, su elasticidad ingreso es 1.

$$e_{x_l^*,m} = \frac{\partial x_l^*(m, p_l)}{\partial m}\frac{m}{x_l^*} = 1,\ \text{para } l = 1,2...$$

Función de utilidad indirecta:

$$u(x_1^*, x_2^*) = v(m, p_1, p_2) = \left[\frac{m}{p_1}\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right]^{\alpha 1}\left[\frac{m}{p_2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right]^{\alpha 2}$$

$$= m^{\alpha 1+\alpha 2} p_1^{-\alpha 1} p_2^{-\alpha 2} \alpha_1^{\alpha 1} \alpha_2^{\alpha 2} (\alpha 1 + \alpha 2)^{-(\alpha 1+\alpha 2)}$$

$$\frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial m} = \frac{\partial v(m, p_1, p_2)}{\partial m} = ?$$

¿A qué debería ser igual?

Problema del consumidor

Resultado:

Invertir la función de utilidad indirecta, ¿a qué conduce?

$$u(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*) = v(m, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = \left[\frac{m}{\mathrm{p}_1}\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right]^{\alpha 1}\left[\frac{m}{\mathrm{p}_2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right]^{\alpha 2}$$

$$m(\bar{u}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = \left(\frac{\bar{u}}{\left[\frac{\alpha_1}{\mathrm{p}_1(\alpha_1 + \alpha_2)}\right]^{\alpha_1}\left[\frac{\alpha_2}{\mathrm{p}_2(\alpha_1 + \alpha_2)}\right]^{\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

¿Función de qué y compensatoria de qué?

Verificarlo substituyendo $\mathrm{x}_1^*(u, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$ y $\mathrm{x}_2^*(u, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$
en la función de gasto a minimizar

Problema del consumidor

$$\max_{x\geq 0} u(x)$$
$$s.a.\ \ px \leq m$$

Dualidad

$$\min_{x\geq 0} px$$
$$s.a.\ \ v(x) = \overline{u}$$

Resolver

Marshalliana

$$x^*(m,\mathrm{p})$$

Resolver

Hicksiana

$$x^*(\overline{u},\mathrm{p})$$

Substituir

utilidad indirecta

$$v(m,\mathrm{p}) = u(x^*)$$

Inversión

Substituir

función de gasto

$$m(\overline{u},\mathrm{p}) = px^*$$

Problema del consumidor

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{array}{l}\text{utilidad indirecta}\\ v(m,\mathrm{p}) = u(x^*)\end{array} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Inversión}"] \arrow[d, "\text{Identidad de Roy}"] & \begin{array}{l}\text{función de gasto}\\ m(\overline{u},\mathrm{p}) = px^*\end{array} \arrow[d, "\text{Diferenciación}"] \\
\begin{array}{l}\text{Marshalliana } (x_i^*)\\ x_i^*(m,\mathrm{p})\end{array} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Substitución}"] & \begin{array}{l}\text{Hicksiana } (x_i^*)\\ x_i^*(\overline{u},\mathrm{p})\end{array}
\end{tikzcd}$$

Problema del consumidor

Diferenciación de la función de gasto con respecto al precio

función de gasto

$$\frac{\partial m(\bar{u}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)}{\partial \mathrm{p}_1} = \mathrm{x}_1^*(u, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = \left(\frac{\bar{u}}{\left[\frac{\mathrm{p}_1}{\mathrm{p}_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right]^{\alpha_2}} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

Cuánto debe aumentar el gasto para mantener fijo el nivel de utilidad cuando cambia el precio del bien i depende de la demanda del bien i

Problema del consumidor

Identidad de Roy (Rene Roy)

Escribiendo la función de utilidad indirecta con $m(\bar{u}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$

$$v(m, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = v(m(\bar{u}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2), \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = \bar{u}$$

y diferenciando ambos lados con respecto a p_1 (o en general p_i)

$$\frac{\partial v(m(\bar{u}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2), \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)}{\partial \mathrm{p}_1} = 0$$

$$\frac{\partial v(m(\bar{u}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2), \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)}{\partial m} \frac{\partial (m(\bar{u}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)}{\partial \mathrm{p}_1} + \frac{\partial v(m(\bar{u}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2), \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)}{\partial \mathrm{p}_1} = 0$$

$$\frac{\partial (m(\bar{u}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)}{\partial \mathrm{p}_1} = -\frac{\dfrac{\partial v(m(\bar{u}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2), \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)}{\partial \mathrm{p}_1}}{\dfrac{\partial v(m(\bar{u}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2), \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)}{\partial m}} = \mathrm{x}_1^*(m, \mathrm{p})$$

Problema del consumidor

La ecuación de Slutsky (Eugen Slutsky)

Los cambios en la demanda producto de cambios en precios dependen de dos efectos: el efecto substitución (por el cambio en precios relativos) y el efecto ingreso (por el cambio en poder de compra del consumidor)

$$\frac{\partial \mathrm{x}_1^*(m, \mathrm{p}_1)}{\partial \mathrm{p}_2} = \underbrace{\frac{\partial \mathrm{x}_1^*(u, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)}{\partial \mathrm{p}_2}}_{\textit{efecto substitución}} - \underbrace{\frac{\partial \mathrm{x}_1^*(m, \mathrm{p}_1)}{\partial m} \mathrm{x}_2^*(m, \mathrm{p}_1)}_{\textit{efecto ingreso}}$$

Problema del consumidor

El problema de la maximización de la utilidad sujeto a la restricción presupuestaria tiene como dual (i.e. como equivalente) la minimización del gasto en bolívares fuertes necesario para alcanzar un nivel de utilidad dado:

$$\max_{x\geq 0} u(x) \qquad \approx \qquad \min_{x\geq 0} px$$
$$s.a.\ \ px \leq m \qquad\qquad s.a.\ \ v(x) = \bar{u}$$

<u>**Ejemplo**</u>: $u(x) = \mathrm{x}_1^{\alpha 1}\mathrm{x}_2^{\alpha 2}$

$$\max_{\{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2\}} \mathrm{x}_1^{\alpha 1}\mathrm{x}_2^{\alpha 2} \qquad \approx \qquad \min_{\{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2\}} \mathrm{p}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{p}_2\mathrm{x}_2$$
$$s.a.\ \ \mathrm{p}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{p}_2\mathrm{x}_2 \leq m \qquad\qquad s.a.\ \ \mathrm{x}_1^{\alpha 1}\mathrm{x}_2^{\alpha 2} = \bar{u}$$

¿Por qué lo anterior es posible? ¿Qué permite la dualidad?
¿Qué conduce a que la selección de las *x* sea igual en ambos casos?
Y, ¿cuál es la implicación para la distribución del ingreso y las interacciones sociales?

Problema del consumidor

Formalmente:

1) Plantear el Lagrange y encontrar los puntos óptimos

$$L = \mathrm{x}_1^{\alpha 1}\mathrm{x}_2^{\alpha 2} - \lambda[\mathrm{p}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{p}_2\mathrm{x}_2 - m]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathrm{x}_1} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathrm{x}_2} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

2) Determinar si corresponde a un máximo (Hessiano restringido)

$$H_R = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*, \lambda^*)}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_1} & \dfrac{\partial^2 L(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*, \lambda^*)}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_2} & \dfrac{\partial g(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*)}{\partial \mathrm{x}_1} \\ \dfrac{\partial^2 L(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*, \lambda^*)}{\partial \mathrm{x}_2 \partial \mathrm{x}_1} & \dfrac{\partial^2 L(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*, \lambda^*)}{\partial \mathrm{x}_2 \partial \mathrm{x}_2} & \dfrac{\partial g(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*)}{\partial \mathrm{x}_2} \\ \dfrac{\partial g(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*)}{\partial \mathrm{x}_1} & \dfrac{\partial g(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*)}{\partial \mathrm{x}_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Problema del consumidor

Formalmente:

$$H_R = \begin{bmatrix} \alpha_1(\alpha_1 - 1)x_1^{\alpha 1-2}x_2^{\alpha 2} & \alpha_1\alpha_2 x_1^{\alpha 1-1}x_2^{\alpha 2-1} & p_1 \\ \alpha_1\alpha_2 x_1^{\alpha 1-1}x_2^{\alpha 2-1} & \alpha_2(\alpha_2 - 1)x_1^{\alpha 1}x_2^{\alpha 2-2} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar el determinante (regla de Laplace - Pierre-Simon Laplace – e.g. 3 fila)

$$\left|H_R\right| = (-1)^4 \times p_1 \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 x_1^{\alpha 1-1}x_2^{\alpha 2-1} & p_1 \\ \alpha_2(\alpha_2 - 1)x_1^{\alpha 1}x_2^{\alpha 2-2} & p_2 \end{vmatrix} + (-1)^5 \times p_2 \begin{vmatrix} \alpha_1(\alpha_1 - 1)x_1^{\alpha 1-2}x_2^{\alpha 2} & p_1 \\ \alpha_1\alpha_2 x_1^{\alpha 1-1}x_2^{\alpha 2-1} & p_2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^6 \times 0 \begin{vmatrix} \alpha_1(\alpha_1 - 1)x_1^{\alpha 1-2}x_2^{\alpha 2} & \alpha_1\alpha_2 x_1^{\alpha 1-1}x_2^{\alpha 2-1} \\ \alpha_1\alpha_2 x_1^{\alpha 1-1}x_2^{\alpha 2-1} & \alpha_2(\alpha_2 - 1)x_1^{\alpha 1}x_2^{\alpha 2-2} \end{vmatrix}$$

Problema del consumidor

Formalmente:

$\left|H_R\right| > 0$ queremos que sea positivo para que sea un máximo, y determinar si lo es requiere substituir el valor de p1 y p2 por sus respectivas ecuaciones en términos de λ

Problema del consumidor

Fin clase de hoy…